

IX. Stereometrie

§1. Základní pojmy

Pozn.: V kapitole o stereometrii, což je geometrie v prostoru, budeme pracovat v základní množině E_3 – množina všech bodů v prostoru = Euklidovský prostor dimenze 3.

V této množině jsou dva typy podmnožin:

- přímky ($p, q, \leftrightarrow AB$), množinu všech přímek označíme P
- roviny ($\alpha, \beta, \leftrightarrow ABC$)

Def.: Body, které leží na jedné přímce, nazýváme kolineární.

Body, respektive přímky, které leží v jedné rovině, nazýváme komplanární.

Tři základní axiomy stereometrie

A₁: Každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka.

$$\forall A, B \in E_3, A \neq B : \exists! p \in P : A \in p \wedge B \in p$$

A₂: Každá rovina je jednoznačně určena:

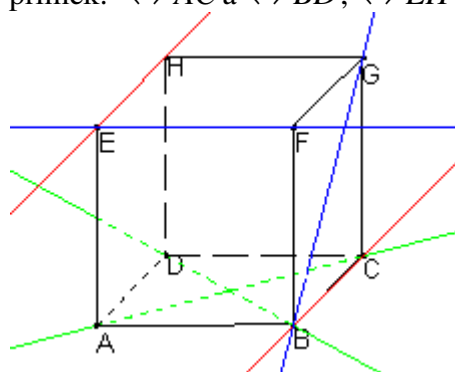
- a) 3 nekolineárními body
- b) přímkou a bodem, který na ní neleží
- c) 2 různými rovnoběžnými přímkami
- d) 2 různoběžnými přímkami

A₃: Jestliže 2 různé body dané přímky leží v dané rovině, pak i celá tato přímka leží v této rovině.

$$\forall p \in P, \forall \rho \subseteq E_3, \exists A, B \in p, A \neq B : A \in \rho \wedge B \in \rho \Rightarrow p \subseteq \rho$$

§2. Dvě přímky v prostoru

Př. Je dána krychle ABCDEFGH, zobrazte ji ve volném rovnoběžném promítání a určete průniky přímek: $\leftrightarrow AC$ a $\leftrightarrow BD$, $\leftrightarrow EH$ a $\leftrightarrow BC$, $\leftrightarrow EF$ a $\leftrightarrow BG$.



Řešení:

$$\leftrightarrow AC \cap \leftrightarrow BD = \{S\} \text{ - jedná se o různoběžky}$$

$$\leftrightarrow EH \cap \leftrightarrow BC = \emptyset \text{ - jedná se o různé rovnoběžky}$$

$$\leftrightarrow EF \cap \leftrightarrow BG = \emptyset \text{ - jedná se o mimoběžky}$$

Pozn.: Pokud mají přímky dva společné různé body, pak podle A₃ mají všechny body společné – splývají.

Def.: Necht' $p, q \in P$ jsou dvě přímky. Jestliže platí:

- a) $p \cap q = \emptyset \wedge p, q$ jsou komplanární $\Rightarrow$ různé rovnoběžky
- b) $p \cap q = \emptyset \wedge p, q$ jsou nekomplanární $\Rightarrow$ mimoběžky
- c) $p \cap q = \{P\} \Rightarrow$ různoběžky a P je průsečík
- d) $p \cap q = p \Rightarrow$ splývající (totožné) rovnoběžky

A₄: Axiom rovnoběžnosti

Každým bodem v E_2 lze vést ke každé přímce právě jednu rovnoběžku.

$$\forall A \in E_2; \forall p \in P; p \subseteq E_2 : \exists! q \in P, q \subseteq E_2 : A \in q \wedge p \parallel q.$$

$$\text{V.2.1.: } \forall A \in E_3; \forall p \in P; p \subseteq E_3 : \exists! q \in P, q \subseteq E_3 : A \in q \wedge p \parallel q.$$

V.2.2.: Tranzitivnost rovnoběžnosti přímek

$$\forall a, b, c \subseteq E_3, a, b, c \in P : a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow c \parallel a$$

Důsledek V.2.1.: Všechny přímky rovnoběžné s danou přímkou jsou navzájem rovnoběžné a vytvářejí tzv. směr.

§3. Dvě roviny

Axiom průniku 2 rovin:

A₅: Necht' α, β jsou takové dvě různé roviny, že $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, pak jejich průnikem je přímka.

Pozn.: Klasifikaci vzájemné polohy 2 rovin provedeme podle jejich průniku:

a) $\alpha = \beta$

b) $\alpha \neq \beta$, pak i) $\alpha \cap \beta = \emptyset$

ii) $\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \exists p \subseteq E_3 : \alpha \cap \beta = p$

Def.: Necht' α, β jsou dvě roviny. Jestliže platí:

a) $\alpha = \beta$, pak se jedná o rovnoběžné splývající roviny

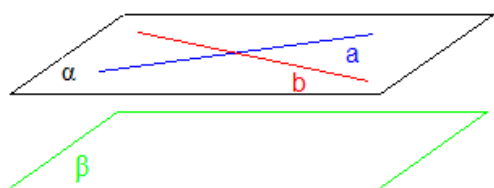
b) $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \cap \beta = \emptyset$, pak se jedná o rovnoběžné různé roviny

c) $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \cap \beta = p$, pak se jedná o různoběžné roviny a přímka p je jejich průsečnicí.

V.3.1: Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin

Necht' α, β jsou 2 roviny. Jestliže rovina α obsahuje 2 různoběžky a, b takové, že $a \cap \beta = \emptyset \wedge b \cap \beta = \emptyset$, pak $\alpha \parallel \beta$.

[Dk.:]



V.3.2: Každým bodem lze ke každé rovině vést právě jednu rovnoběžnou rovinu.

$$\forall A \in E_3, \forall \alpha \subseteq E_3 : \exists! \beta \subseteq E_3 : A \in \beta \wedge \alpha \parallel \beta.$$

§4. Přímka a rovina

Pozn.: Klasifikaci vzájemné polohy přímky a roviny provedeme podle jejich společného průniku:

- a) prázdná množina
- b) jednoprvková množina
- c) aspoň dva prvky, pak je průnikem celá přímka.

Def.: Nechť $a \subseteq E_3$, $\alpha \subseteq E_3$. Jestliže platí:

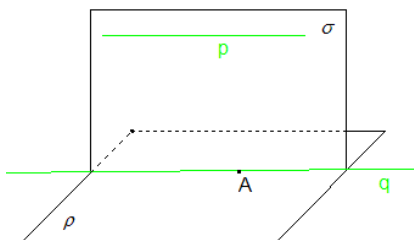
- a) $a \cap \alpha = \emptyset \Rightarrow$ Přímka a je s rovinou α rovnoběžná.
- b) $a \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow$ Přímka a je s rovinou α různoběžná, bod P je jejich průsečík.
- c) $a \cap \alpha = a \Rightarrow$ Přímka a leží v rovině α , ($a \subseteq \alpha$).

Pozn.: Je-li $a \subseteq \alpha$, pokládáme přímku a též za rovnoběžnou s rovinou α .

V.4.1.: Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny:

Pro $\forall p \in P$ a $\forall \rho \subseteq E_3$ platí: $p \parallel \rho \Leftrightarrow \exists q \subseteq \rho : p \parallel q$.

[Dk.:]



V.4.2.: Nechť $\forall p \in P, \forall \rho \subseteq E_3 : p \parallel \rho \Rightarrow \forall \sigma \subseteq E_3 : p \subseteq \sigma \wedge \sigma \nparallel \rho$: Pak rovina σ protne rovinu ρ v průsečnici q , $q = \rho \cap \sigma$ a platí: že $p \parallel q$.

Pozn.: Obecný postup při stanovení průniku přímky p a roviny ρ :

- 1) Přímku p proložíme libovolnou rovinu σ , $\sigma \nparallel \rho$.
 - 2) Sestrojíme průsečnici q rovin ρ a σ .
 - 3) Průsečíkem $p \cap \rho$ je průsečík p a q (pokud existuje).
- Pokud $\sigma \cap \rho = \emptyset \vee p \cap q = \emptyset \Rightarrow p \parallel \rho$, ($p \cap \rho = \emptyset$).

§5. Tři různé roviny

V.5.1: Tranzitivnost rovnoběžnosti rovin:

$\forall \alpha, \beta, \gamma \subseteq E_3 : \alpha \parallel \beta \wedge \beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$.

[Dk.: Analogicky jako ve V.2.2.]

V.5.2: Vzájemná poloha 3 různých rovin:

Nechť $\forall \alpha, \beta, \gamma \subseteq E_3$ jsou navzájem tři různé roviny, pak jejich vzájemná poloha v prostoru je jedním z následujících 5 typů:

- 1) $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ - všechny tři roviny jsou navzájem rovnoběžné
- 2) Některé dvě roviny (např. α, β) jsou různoběžné, označme $\alpha \cap \beta =$ přímka a , pak nastane některý z těchto 3 případů:

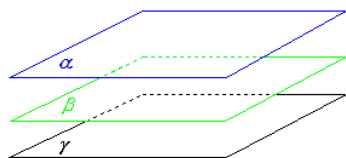
a) $\alpha \cap \gamma = \emptyset \Rightarrow I. : \alpha \parallel \gamma$ - dvě rovnoběžné roviny protínají třetí (přitom obě průsečnice jsou rovnoběžné).

$\Rightarrow II. : \alpha \nparallel \gamma$ - všechny tři průsečnice dvojic těchto rovin jsou navzájem rovnoběžné.

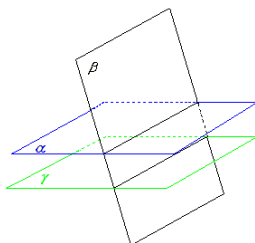
b) $\alpha \cap \gamma = \{P\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}$ - všechny tři roviny tvoří tzv. trs.

c) $\alpha \cap \gamma = a \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = a$ - všechny tři roviny se protínají v přímce a .

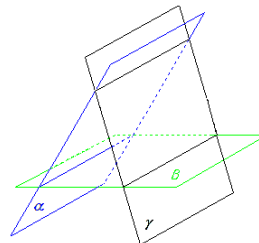
1)



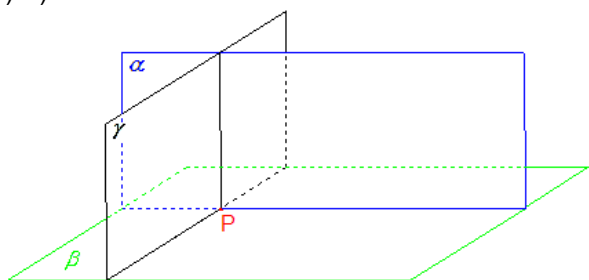
2) a) I.



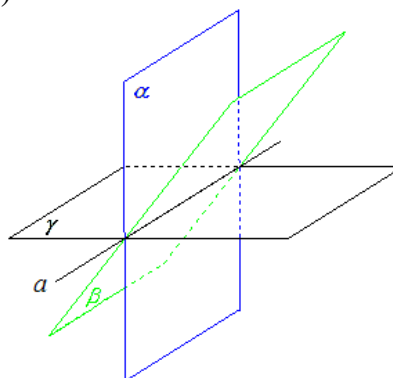
2) a) II.



2) b)



2) c)



§6. Kolmost přímek v rovině a v prostoru

Pozn.: Dvě přímky v rovině nazveme kolmými právě tehdy, když všechny 4 úhly, které svírají, jsou shodné, a tedy pravé.

Def.: Přímky $p, q \subseteq E_3$ se nazývají navzájem kolmé ($p \perp q$), právě když: $\exists p', q' \subseteq E_3$:

1) $p' \parallel p \wedge q' \parallel q$

2) p', q' leží v jedné rovině

3) $p' \perp q'$ (ve smyslu předchozí poznámky)

Pozn.: Uvedená definice je i kritériem kolmosti přímek v prostoru, ale není vhodná k dokazování toho, že přímky p, q na sebe kolmé nejsou.

V.6.1: Necht' $p, q \subseteq E_3, p \perp q$.

Pak $\forall p', q' \subseteq E_3 : p' \parallel p, q' \parallel q \Rightarrow p' \perp q'$

Pozn.: Máme-li dokázat, že přímky p, q kolmé nejsou, použijeme negaci V.6.1.

Stačí nalézt 1dvojici přímek p', q' :

$\exists p', q' \subseteq E_3 : 1) p' \parallel p \wedge q' \parallel q$

2) p', q' leží v jedné rovině

3) $p' \nperp q'$

§7. Kolmost přímky a roviny

Def.: Necht' $p \subseteq E_3$ je přímka a $\alpha \subseteq E_3$ je rovina. Řekneme, že přímka p je kolmá k rovině α $\Leftrightarrow \forall q \subseteq \alpha : q \perp p$.

Pozn.: Předchozí definice je pro dokazování kolmosti neefektivní, použijeme V.7.1.

V.7.1.: Kritérium kolmosti přímky a roviny:

Necht' $p \subseteq E_3$ je přímka a $\alpha \subseteq E_3$ je rovina. Pak platí:

$$p \perp \alpha \Leftrightarrow \exists q, r \subseteq \alpha : q \nparallel r : q \perp p \wedge r \perp p$$

Pozn.: K důkazu toho, že přímka není kolmá k rovině, používáme obměnu definice.

V.7.2: $\forall p, q \subseteq E_3, \forall \alpha, \beta \subseteq E_3, p \perp \alpha :$ a) $q \parallel p \Leftrightarrow q \perp \alpha$
b) $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow p \perp \beta$

V.7.3: Každým bodem lze vést právě 1 přímku, která je kolmá k dané rovině.
Daným bodem prochází právě jedna rovina kolmá k dané přímce.

§8. Kolmost rovin

Def.: Řekneme, že rovina α je kolmá k rovině β ($\alpha \perp \beta$), jestliže $\exists a \subseteq \alpha : a \perp \beta$.

Pozn.: a) Definice je současně kritériem kolmosti dvou rovin.
b) Kolmost rovin je symetrickou relací, proto mluvíme o vzájemné kolmosti dvou rovin.

V.8.1.: $\forall p \subseteq E_3, \forall \alpha, \beta, \gamma \subseteq E_3$ platí:

a) $p \perp \alpha \wedge p \parallel \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$

b) $p \perp \alpha \wedge \alpha \perp \beta \Rightarrow p \parallel \beta$

c) $\alpha \perp \beta \wedge \beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \perp \gamma$

V.8.2.: Ke každé přímce p , která není kolmá k rovině α , existuje právě 1 rovina β taková, že:
 $\beta \perp \alpha, p \subseteq \beta$.

Pozn.: Průsečnice rovin z předchozí věty se nazývá kolmým průmětem přímky p do roviny α .